

## 1.9. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

### Definicja wartości bezwzględnej

$$|x| = \begin{cases} x \dots \text{gdy} \dots x \geq 0 \\ -x \dots \text{gdy} \dots x < 0 \end{cases}$$

### Własności wartości bezwzględnej

$$|x| \geq 0$$

$$|x| = |-x|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|, \text{ gdy } n \text{ jest liczbą parzystą}$$

Przykład 1.9.1. Oblicz:

a)  $|3|$       b)  $|-3|$       c)  $\left|-\frac{1}{3}\right|$       d)  $|0|$

e)  $|1 - \sqrt{2}|$       f)  $|\sqrt{2} - 1|$       g)  $|3,14 - \pi|$       h)  $\sqrt{(\sqrt{3} - 3)^2}$

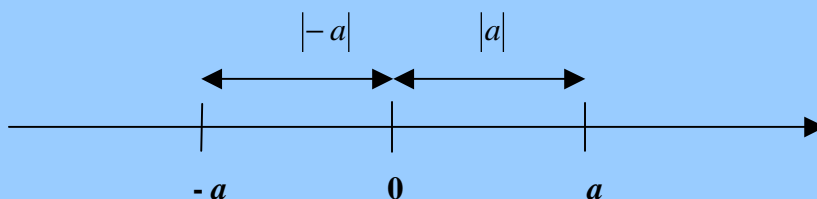
Rozwiązanie	Komentarz
a) $ 3  = 3$	Wykorzystujemy definicję $ x  = x$ gdy $x \geq 0$
b) $ -3  = 3$	Wykorzystujemy definicję $ x  = -x$ gdy $x < 0$
c) $\left -\frac{1}{3}\right  = \frac{1}{3}$	Wykorzystujemy definicję $ x  = -x$ gdy $x < 0$
d) $ 0  = 0$	Wykorzystujemy definicję $ x  = x$ gdy $x \geq 0$
e) $ 1 - \sqrt{2}  = -1 + \sqrt{2}$	Liczba $1 - \sqrt{2}$ jest ujemna, zatem wykorzystując definicję $ x  = -x$ gdy $x < 0$ , opuszczamy wartość bezwzględną zmieniając znak.

f) $ \sqrt{2}-1  = \sqrt{2}-1$	Liczba $\sqrt{2}-1$ jest dodatnia, zatem wykorzystując definicję $ x  = x$ gdy $x \geq 0$ , opuszczamy wartość bezwzględną nie zmieniając znaku.
g) $ 3,14-\pi  = -3,14+\pi$	$\pi = 3,14592654\dots$ , zatem liczba $3,14-\pi$ jest ujemna. Wykorzystując definicję $ x  = -x$ gdy $x < 0$ , opuszczamy wartość bezwzględną zmieniając znak.
h) $\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2} =  \sqrt{3}-3  =$  $= -\sqrt{3}+3$	Wykorzystując własność $\sqrt[n]{a^n} =  a $ , gdy $n$ jest liczbą parzystą, zastępujemy pierwiastek wartością bezwzględną  Liczba $\sqrt{3}-3$ jest ujemna, zatem wykorzystując definicję $ x  = -x$ gdy $x < 0$ , opuszczamy wartość bezwzględną zmieniając znak.

Przykład 1.9.2. Wyrażenie  $|x+2|-|1-x|$ , gdy  $x \in (-\infty, -3)$  zapisz bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

Rozwiązanie	Komentarz
$ x+2 - 1-x  = (-x-2)-(1-x) =$  $= -x-2-1+x = -3$	Wyrażenie $x+2$ dla $x \in (-\infty, -3)$ jest ujemne, zatem opuszczamy wartość bezwzględną z tego wyrażenie zmieniając znak.  Wyrażenie $1-x$ dla $x \in (-\infty, -3)$ jest dodatnie, zatem opuszczamy wartość bezwzględną z tego wyrażenie nie zmieniając znaku.  Opuszczamy nawiasy, upraszczamy.

### Interpretacja wartości bezwzględnej



Wartość bezwzględna liczby jest to odległość tej liczby od zera.

### Równania z wartością bezwzględną

Jeśli  $a > 0$ , to  $|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$

Jeśli  $a = 0$ , to  $|x| = a \Leftrightarrow x = 0$

Jeśli  $a < 0$ , to  $|x| = a \Leftrightarrow x \in \emptyset$

### Nierówności z wartością bezwzględną

Jeśli  $a > 0$ , to  $|x| < a \Leftrightarrow x < a \wedge x > -a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$

Jeśli  $a > 0$ , to  $|x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$

**Przykład 1.9.3.** Korzystając z interpretacji wartości bezwzględnej rozwiąż równania i nierówności.

a)  $|x| = 2$

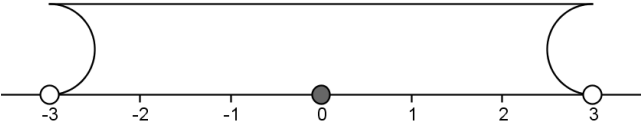
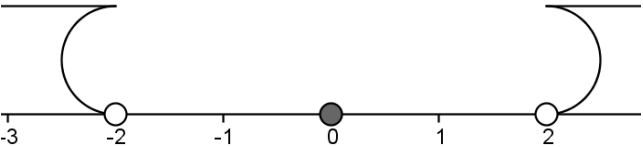
b)  $|x| = 0$

c)  $|x| = -6$

d)  $|x| < 3$

e)  $|x| > 2$

Rozwiązanie	Komentarz
a) $ x  = 2$ $x = 2 \vee x = -2$	Równanie $ x  = 2$ spełniają liczby, których odległość od 0 jest równa 2. Są to 2 i $-2$ .
b) $ x  = 0$ $x = 0$	Równanie $ x  = 0$ spełniają liczby, których odległość od 0 jest równa 0. Jest to 0.
c) $ x  = -6$ brak rozwiązania	Odległość nie może być liczbą ujemną.

<p>d) <math> x  &lt; 3</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>x \in (-3, 3)</math></p>	<p>Nierówność <math> x  &lt; 3</math> spełniają wszystkie liczby, których odległość od 0 jest mniejsza od 3.</p>
<p>e) <math> x  &gt; 2</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)</math></p>	<p>Nierówność <math> x  &gt; 2</math> spełniają wszystkie liczby, których odległość od 0 jest większa od 2.</p>

Przykład 1.9.4. Rozwiąż równania

a)  $|x - 3| = 5$       b)  $|3x - 5| = 0$       c)  $\left| \frac{-2x}{3} \right| = 5 - |x|$

Rozwiązanie	Komentarz
<p>a) <math> x - 3  = 5</math>  <math>x - 3 = 5</math>    lub    <math>x - 3 = -5</math>  <math>x = 5 + 3</math>        <math>x = -5 + 3</math>  <math>x = 8</math>                <math>x = -2</math>            Odp. Równanie ma dwa rozwiązania: 8, -2</p>	<p>Opuszczamy wartość bezwzględną wykorzystując własność :            Jeśli <math>a &gt; 0</math>, to <math> x  = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a</math>            Rozwiązujemy otrzymane równania.</p>
<p>b) <math> 3x - 5  = 0</math>  <math>3x - 5 = 0</math>  <math>3x = 5 / : 3</math>  <math>x = \frac{5}{3}</math>  <math>x = 1\frac{2}{3}</math>            Odp. Równanie ma jedno rozwiązanie: <math>1\frac{2}{3}</math></p>	<p>Opuszczamy wartość bezwzględną wykorzystując własność :            Jeśli <math>a = 0</math>, to <math> x  = a \Leftrightarrow x = 0</math>            Rozwiązujemy otrzymane równanie</p>

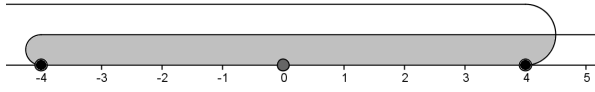
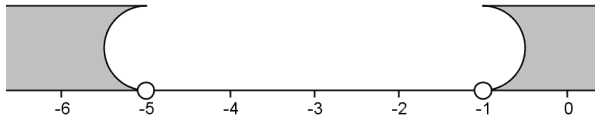
<p>c) <math>\left  \frac{-2x}{3} \right  = 5 -  x </math></p> $\frac{ -2  x }{ 3 } = 5 -  x $ $\frac{2 x }{3} = 5 -  x  \cdot 3$ $2 x  = 15 - 3 x $ $2 x  + 3 x  = 15$ $5 x  = 15 \quad / : 5$ $ x  = 3$ $x = 3 \quad \text{lub} \quad x = -3$ <p>Odp. Równanie ma dwa rozwiązania: 3, -3</p>	<p>Równanie doprowadzamy do postaci <math> bx + c  = a</math>, wykorzystując własności:</p> $ x \cdot y  =  x  \cdot  y  \quad , \quad \left  \frac{x}{y} \right  = \frac{ x }{ y }$ <p>Rozwiązujemy otrzymane równanie wykorzystując własność:</p> <p>Jeśli <math>a &gt; 0</math>, to <math> x  = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a</math></p>
---	---

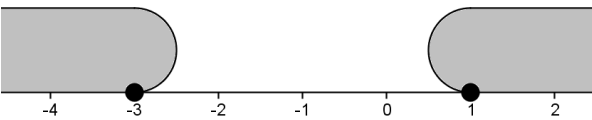
**Przykład 1.9.5. Rozwiąż nierówności**

a)  $|x| \leq 4$

b)  $|x+3| > 2$

c)  $|x+1| \geq 6 - |2x+2|$

Rozwiązanie	Komentarz
<p>a) <math> x  \leq 4</math></p> $x \leq 4 \quad \text{i} \quad x \geq -4$  <p><math>x \in \langle -4, 4 \rangle</math></p>	<p>Opuszczamy wartość bezwzględną wykorzystując własność:</p> <p>Jeśli <math>a &gt; 0</math>, to <math> x  &lt; a \Leftrightarrow x &lt; a \wedge x &gt; -a</math></p> <p>Rozwiązanie przedstawiamy na osi liczbowej.</p>
<p>b) <math> x+3  &gt; 2</math></p> $x+3 > 2 \quad \text{lub} \quad x+3 < -2$ $x > 2-3 \quad \quad \quad x < -2-3$ $x > -1 \quad \quad \quad \quad \quad x < -5$  <p><math>x \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)</math></p>	<p>Opuszczamy wartość bezwzględną wykorzystując własność:</p> <p>Jeśli <math>a &gt; 0</math>, to <math> x  &gt; a \Leftrightarrow x &gt; a \vee x &lt; -a</math></p> <p>Rozwiązujemy otrzymane równania .</p> <p>Rozwiązania przedstawiamy na osi liczbowej</p>

<p>c) <math> x+1  \geq 6 -  2x+2 </math>  <math> x+1  \geq 6 - 2 x+1 </math>  <math> x+1  \geq 6 - 2 x+1 </math>  <math> x+1  \geq 6 - 2 x+1 </math>  <math> x+1  + 2 x+1  \geq 6</math>  <math>3 x+1  \geq 6 / : 3</math>  <math> x+1  \geq 2</math>  <math>x+1 \geq 2 \quad \text{lub} \quad x+1 \leq -2</math>  <math>x \geq 2-1 \quad \quad \quad x \leq -2-1</math>  <math>x \geq 1 \quad \quad \quad \quad \quad x \leq -3</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)</math></p>	<p>Nierówność doprowadzamy do postaci <math> bx+c  \geq a</math>, wykorzystując własność:  <math> x \cdot y  =  x  \cdot  y </math></p> <p>Opuszczamy wartość bezwzględną wykorzystując własność:  <b>Jeśli <math>a &gt; 0</math>, to <math> x  &gt; a \Leftrightarrow x &gt; a \vee x &lt; -a</math></b>  Rozwiązujemy otrzymane równania .</p> <p>Rozwiązania przedstawiamy na osi liczbowej</p>
---	--

## ĆWICZENIA

Ćwiczenie 1.9.1. Oblicz:

a) (1pkt.)  $|-11|$

b) (1pkt.)  $|2\sqrt{3} - 5|$

c) (1pkt.)  $\sqrt{(4 - \sqrt{5})^2}$

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie odpowiedzi.	1

Ćwiczenie 1.9.2. Zapisz podane wyrażenia bez wartości bezwzględnej, jeśli  $a > 0, b < 0$ :

a) (1pkt.)  $\left| \frac{2a}{b} \right|$

b) (1pkt.)  $|a - b|$

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Zapisanie wyrażeń bez wartości bezwzględnej.	1

Ćwiczenie 1.9.3. Rozwiąż równania:

a) (2pkt.)  $|2x - 3| = 4$

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Zapisanie równania bez wartości bezwzględnej.	1
2	Podania rozwiązań równania.	1

b) (2pkt.)  $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = 5$

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Zapisanie równania przy użyciu wartości bezwzględnej.	1
2	Podania rozwiązań równania.	1

Ćwiczenie 1.9.4. Rozwiąż nierówności

a) (2pkt.)  $|x - 3| \geq 2$

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Zapisanie nierówności bez wartości bezwzględnej.	1
2	Podanie rozwiązania nierówności w postaci przedziału lub sumy przedziałów.	1

b) (2pkt.)  $|x + 2| + |2x + 4| < 12$

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Zapisanie nierówności w postaci $ bx + c  < a$	1
2	Podanie rozwiązania nierówności w postaci przedziału lub sumy przedziałów.	1